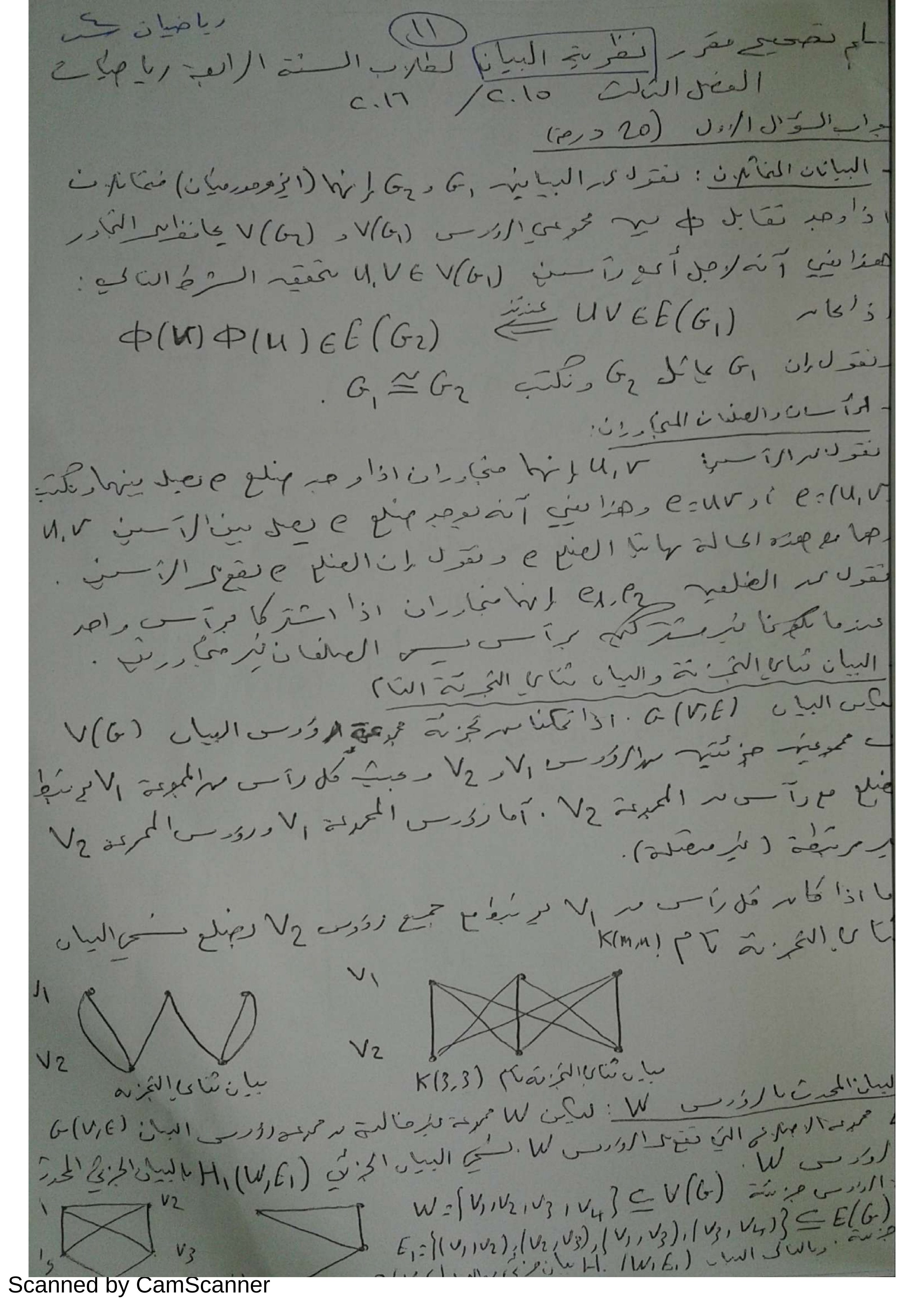


رياضيات ش

(11)

سلم تصحيح مقرر نظرية البيانات لطلاب السنة الرابعة رياضيات

الفصل الثالث ٢٠١٥ / ٢٠١٦

جواب السؤال الأول (20 درجة)

- البيانات المتشاكلة: نقول عن البيانين G_1 و G_2 إنهما (ايزومورفيان) متشاكلان إذا وجد تقابل ϕ بين مجموعتي الرؤوس $V(G_1)$ و $V(G_2)$ يحافظ على التجاور، هذا يعني أنه من أجل أي رأسين $u,v \in V(G_1)$ يتحقق الشرط التالي:

إذا كان $uv \in E(G_1)$ عندئذ $\phi(v)\phi(u) \in E(G_2)$

نقول إن G_1 يماثل G_2 ونكتب $G_1 \cong G_2$.

- الرؤوس والضلعات المتجاورات:

نقول عن الرأسين u,v إنهما متجاوران إذا وجد ضلع e تصل بينهما ونكتب $e=(u,v)$ أو $e=uv$ وهذا يعني أنه يوجد ضلع e يصل بين الرأسين u,v وعادة في هذه الحالة نهايتا الضلع e ونقول إن الضلع e تقع على الرأسين.

نقول عن الضلعين e_1,e_2 إنهما متجاوران إذا اشتركا برأس واحد عندما لا يكونا لا يشتركا برأس بين الضلعان غير متجاورتين.

- البيان ثنائي التجزئة والبيان ثنائي التجزئة التام

ثنائي البيان $G(V,E)$ إذا تمكنا من تجزئة مجموعة رؤوس البيان $V(G)$ إلى مجموعتين جزئيتين من الرؤوس V_1 و V_2 وبحيث كل رأس من المجموعة V_1 يرتبط بضلع مع رأس من المجموعة V_2. أما رؤوس المجموعة V_1 ورؤوس المجموعة V_2 غير مرتبطة (غير متصلة).

أما إذا كان كل رأس من V_1 يرتبط مع جميع رؤوس V_2 بضلع نسمي البيان ثنائي التجزئة تام $K(m,n)$

V_1 V_2

بيان ثنائي التجزئة   بيان ثنائي التجزئة تام $K(3,3)$

- البيان المحدث بالرؤوس W: ليكن W مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة رؤوس البيان $G(V,E)$ مجموعة الأضلاع التي تقع بين رؤوس W. نسمي البيان الجزئي $H_1(W,E_1)$ بالبيان الجزئي المحدث برؤوس W.

الرؤوس جزئية $W=\{v_1,v_2,v_3,v_4\} \subseteq V(G)$

جزئية $E_1=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_1,v_3),(v_3,v_4)\} \subseteq E(G)$

وبالتالي البيان $H_1(W,E_1)$ بيان جزئي ...

جواب السؤال الثاني (25 درجة):

البيان الموجه: هو بيان موجه الاضلاع، أي كل ضلع موجه من رأس الى آخر مع ملاحظة وجود اكثر من ضلع بين رأسين ربما باتجاهين مختلفين.

نسمي كل ضلع في البيان الموجه بضلع موجه (أو قوس) ونلاحظ ان بداية ضلع موجه هي نفس الرأس ونهايته تسمى عروة موجهة ونرمز للبيان الموجه $D(V,A)$.

البيان الموجه البسيط: هو بيان موجه خالي من العروات ولا يحتوي على أضلاع موجهة من رأس الى آخر بنفس الاتجاه.

ليكن البيان الموجه $D(V,A)$. نقول لـ D إنه متناظر اذا كان $(u,v) \in A(D)$ عندئذ يكون $(v,u) \in A(D)$.

يكون البيان الموجه $D(V,A)$ دوري اذا كان يصل بين كل رأسين قوس واحد فقط.

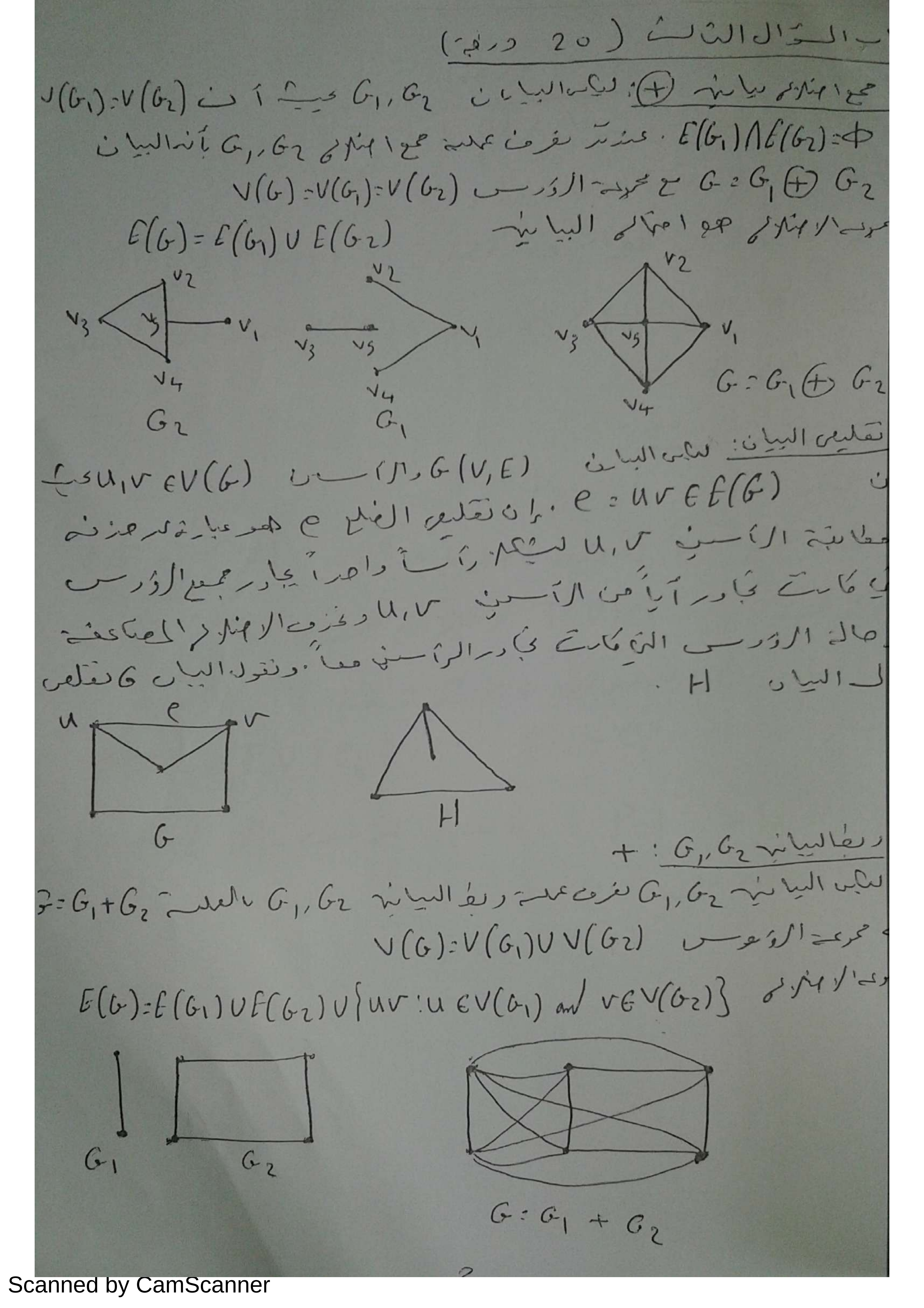
مصفوفة التقاطع:

هي مصفوفة من الرتبة $p \times q$ ومعرفة بالشكل: $B_1(D) = [b_{ij}]$ وتعطى بالشكل:

$$B_1(D) = \begin{cases} 1 & \text{رأس بداية للقوس } e_j \ v_i \\ -1 & \text{رأس نهاية للقوس } e_j \ v_i \\ 0 & \text{لا يقع القوس } e_j \text{ على الرأس } v_i \end{cases}$$

$B_1(D) =$

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
v_1	0	0	0	-1	0	1
v_2	1	0	1	0	0	0
v_3	-1	1	0	0	0	0
v_4	0	-1	0	1	1	0
v_5	0	0	1	0	-1	-1



ب- السؤال الثالث (20 درجة)

جمع اضلاع بيانين $\oplus$: ليكن البيانان G_1, G_2 حيث أن $V(G_1)=V(G_2)$

$E(G_1)\cap E(G_2)=\Phi$. عندئذ نعرف عملية جمع الاضلاع للبيانين G_1, G_2 بأنه البيان

$G=G_1\oplus G_2$ مع مجموعة الرؤوس $V(G)=V(G_1)=V(G_2)$

مجموعة الاضلاع هو اضلاع البيانين $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)$

تقليص البيان: ليكن البيان $G(V,E)$ وليكن $u,v\in V(G)$ حيث

ان $e=uv\in E(G)$. ان تقليص الضلع e هو عبارة عن حذفه

ومطابقة الرأسين u,v ليصبحا رأساً واحداً يجاور جميع الرؤوس

التي كانت تجاور أياً من الرأسين u,v وحذف الاضلاع المضاعفة

في حالة الرؤوس التي كانت تجاور الرأسين معاً. ونقول البيان G تقلص

الى البيان H .

ربط البيانين G_1, G_2 : +

ليكن البيانين G_1, G_2 نعرف عملية ربط البيانين G_1, G_2 بالعلاقة $G=G_1+G_2$

مع مجموعة الرؤوس $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$

ومجموعة الاضلاع $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{uv : u\in V(G_1) \text{ and } v\in V(G_2)\}$

جواب السؤال الرابع (15 درجة):

نص خوارزمية كروسكال لإيجاد أصغر شجرة قياس:

المعطيات: $G(V,E)$ بيان مترابط وموزون.

المخرجات: شجرة القياس الصغرى $T(V, E(T))$

الطريقة: إيجاد الضلع التالي لأصغر وزنه $W(e)$ بحيث لا يشكل حلقة مع الأضلاع الأخرى.

خطوات الخوارزمية:

1- لتكن $i=1$ ، $T=\Phi$

2- نختار ضلع e له وزن أصغري بحيث $e \notin E(T)$ وكذلك $T \cup \{e\}$ لا يحتوي على حلقة ،

إذا كان e غير موجود ، عندئذ توقف وإلا $e \to e_i$ و $T \to T \cup \{e_i\}$

3- إذا كان $i = p-1$ ، عندئذ توقف وإلا $i \to i+1$ واذهب إلى 2 .

جواب السؤال الخامس (20 درجة)

متتالية الدرجة: ليكن البيان $G(V,E)$ مكافئ $|E|=q$ ورتبته $|V|=p$ (درجة الرأس v_i)

إذا كان $V(G)=\{v_1,v_2,\dots,v_p\}$ حيث $\rho(v_i)=d_i\geq 0$ $(i=1,2,\dots,p)$

عندئذ نسمي المتتالية $d_1,d_2,\dots,d_p$ متتالية الدرجة للبيان G.

يمكن أن يكون لـ G أكثر من متتالية درجة لاختلاف العناصر ولكن بترتيب مختلف تبعاً لترقيم رؤوس البيان ولكن في جميع الأحوال نرمز لمتتالية درجة البيان بالشكل:

$S: d_1,d_2,\dots,d_p$ حيث $d_i\geq d_{i+1}$ $(i=1,2,\dots,p)$.

مبرهنة إيردوس كالاي: لتكن المتتالية $S: d_1,d_2,\dots,d_p$ حيث

$d_1\geq d_2\geq\dots\geq d_p\geq 0$ عندئذ تكون قابلة للرسم إذا وفقط إذا كان

$\sum_{i=1}^{p} d_i$ عدداً زوجياً.

- لأجل كل عدد صحيح K $(1\leq K\leq p-1)$ يكون: $\sum_{i=1}^{K} d_i\leq K(K-1)+\sum_{i=K+1}^{p}\min\{K,d_i\}$

مثال: $S: 5,4,3,3,2,2,1$

الحل: نلاحظ أن $\sum_{i=1}^{7} d_i=20$ الشرط الأول محقق.

نتحقق من صحة المتراجحة بالشرط الثاني مقابل $i=1$ ← K

1) $K=1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{1} d_1=d_1=5 \Rightarrow d_1=5\leq 1\cdot(0)+\sum_{i=2}^{7}\min\{1,d_i\}=0+6=$ ($K(K-1)=1\cdot(1-1)=1\cdot(0)$)

2) $K=2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} d_i=d_1+d_2=9\leq 2\cdot(1)+\sum_{i=3}^{7}\min\{2,d_i\}=2+9=$

3) $K=3 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} d_i=d_1+d_2+d_3=12\leq 3\cdot(2)+\sum_{i=4}^{7}\min\{3,d_i\}=6+8=$

4) $K=4 \Rightarrow \sum_{i=1}^{4} d_i=15\leq 4\cdot(3)+\sum_{i=5}^{7}\min\{4,d_i\}=12+5=17$

5) $K=5 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} d_i=17\leq 5\cdot 4+\sum_{i=6}^{7}\min\{5,d_i\}=20+3=23$

6) $K=6 \Rightarrow \sum_{i=1}^{6} d_i=19\leq 6\cdot(5)+\sum_{i=7}^{7}\min\{6,d_i\}=30+1=31$

نلاحظ أن الشرط الثاني محقق وبالتالي المتتالية قابلة للرسم.

المتراجحة $\sum_{i=1}^{K} d_i\leq K(K-1)+\sum_{i=K+1}^{p}\min\{K,d_i\}$ محققة من أجل $i=1$ ← 6

انتهت الأسئلة

د. زكريا زكريا